



TITLE:

# 密度成層と表面張力を伴った界面 における有限振幅定在波解 (オイラ ー方程式の数理: 渦運動と音波 150年)

AUTHOR(S):

松岡, 千博

---

CITATION:

松岡, 千博. 密度成層と表面張力を伴った界面における有限振幅定在波解 (オイラー方程式の数理: 渦運動と音波150年). 数理解析研究所講究録 2010, 1697: 110-120

ISSUE DATE:

2010-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141668>

RIGHT:

# 密度成層と表面張力を伴った界面における有限振幅定在波解

松岡千博

愛媛大学大学院理工学研究科

## 概要

密度成層と表面張力を伴った界面における有限振幅定在波解が解析的かつ数値的に議論された。表面張力が存在すると、上側の流体が下側の流体より重いときに生じる重力不安定性（レーリー・テラー不安定性）は、系の線形分散関係式がある条件を満たす場合には安定化し、界面は振動を始める。この振動について詳しい解析がなされた。線形分散関係式の振動数がゼロになると、線形安定だが、漸近的に不安定な運動が生じる。この臨界点近傍の界面の運動についても議論された。また、線形分散関係式の振動数が共鳴条件を満たす場合のモード間相互作用の様子についても調べられた。

## 1 序論

表面張力を伴った界面の運動の代表的なものは表面張力波（capillary-gravity wave）における振動である。表面張力波では上側の流体は下側の流体より軽く、その運動は線形安定である。このような系では、表面張力ゼロでも分散が存在し、重力波または水面波と呼ばれる<sup>1)</sup>。通常上側の流体が空気、下側が水で、解析に際しては上側の流体の寄与は無視される（一相流体）。表面張力波に関しては、有限振幅の進行波<sup>2)</sup>及び定在波<sup>3, 4, 5)</sup>が存在することが知られているが、その安定性は不明である。上側の流体が下側の流体より重いときには、レーリー・テラー不安定性 (RTI) として知られる重力不安定が生じ、界面は（線形では）指数関数的に不安定になる。また、水面波の場合と同じく、表面張力ゼロでも系には分散が存在する。密度成層を伴ったもう一つの不安定性、初期に境界に非一様渦度分布が存在することによって2種の流体の界面が不安定化するリヒトマイヤー・メシュコフ不安定性 (RMI) と呼ばれる流体不安定性は、線形では時間  $t$  に比例して成長し、やがて界面がマッシュルーム状に巻き上がる<sup>6, 7, 8, 9)</sup>。この不安定性は通常衝撃波の通過によって引き起こされ、上側の流体が重くても下側の流体が重くても界面の運動は変わらない。すなわち、重力は考慮されない。表面張力ゼロのとき、RMI に分散は存在しない。この論文では、表面張力を考慮した RTI および RMI の有限振幅定在波解について解析的かつ数値的に調べた結果を報告する。

表面張力係数が小さいときには、RTI, RMI における界面は最終的に巻き上がるが、その巻きは表面張力が存在しないときに比べて弱い<sup>10, 11)</sup>。この巻き上がりでは、界面上の近接2点間距離が非常に近くなる“ピンチング”<sup>12, 13, 14, 15)</sup>と呼ばれる現象が観察される。この不安定運動は、系の線形分散関係がある条件を満たすと安定化される。RMI については、界面運動を安定化させるのに大きな表面張力係数を必要とする<sup>11)</sup>が、RTI では比較的小さい表面張力係数で安定化が可能である。線形分散における振動数がゼロのとき、表面張力を伴った RTI には線形安定であるが漸近的には不安定であるような奇妙な運動が生じる。振動数ゼロというのは不安定運動（安定運動）が安定化（不安定化）する分岐点に相当し、ちょうどこの点が運動の臨界点となっている。第3節でこの臨界点および臨界点近傍の運動が数値的に調べられる。有限振幅定在波解を記述するための弱非線形解析が第2節でなされる。この非線形解析の結果、異なったモードをもつ2つの波が同じ線形分散関係式を満たす、一種の共鳴条件が得られる。この共鳴条件が満たされる場合の有限振幅定在波解に関する数値計算の結果も第3節で与えられる。第4節は結論に充てられている。

## 2 非線形安定性解析と有限振幅定在波解

ここでは2次元の非粘性非圧縮流を考える。界面の変位  $y = \eta(x, t)$  は次の運動学的境界条件を満たす。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y}. \quad (1)$$

ここで、 $\phi_i$  は流体  $i$  ( $i = 1, 2$ ) における速度ポテンシャルで、各流体の速度  $\mathbf{u}_i$  と  $\mathbf{u}_i = \nabla \phi_i$  なる関係で結ばれている。また、 $i = 1$  ( $i = 2$ ) は下側 (上側) の流体と仮定する。

圧力境界条件、すなわち界面におけるラプラス-ヤング条件は

$$(1-A) \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - (1+A) \left\{ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - 2Ag\eta = \sigma\kappa, \quad (2)$$

で与えられる。ここで  $A = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2)$  は系のアトウッド数で、 $\rho_i$  は流体  $i$  ( $i = 1, 2$ ) の密度、 $g$  は重力加速度、 $\sigma = 2\sigma_0/(\rho_1 + \rho_2)$  は元の表面張力係数  $\sigma_0$  に対して規格化された表面張力係数、 $\kappa$  は  $\kappa = \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2}$  で与えられる界面の曲率である。系は非粘性非圧縮と仮定されているので、各流体領域  $i$  ( $i = 1, 2$ ) においてラプラス方程式  $\Delta \phi_i = 0$  が成り立つ。

方程式 (1) と (2) は線形領域において次のような定在波解をもつ：

$$\eta = \text{Re}\{A_1 e^{i\omega t}\} \cos(kx), \quad A_1 \in \mathbb{C}.$$

ここで  $k$  を波数として系の線形分散関係は  $\omega^2 = -Agk + k^3\sigma/2$  で与えられる。以下では、上記線形解を弱非線形解析を用いて非線形定在波解に拡張する。一相流 ( $A = -1$ ) の表面張力波に関しては、非線形定在波解に関していくつかの研究が存在する。Concus<sup>3)</sup> は重力と表面張力を考慮した2次元ポテンシャル流について有限振幅定在波解を求めた。彼は摂動展開を実行し、有限深さの効果を考慮した3次までの解を、非線形領域における振動数のずれまで含めて解析的に計算した。Concusの手法はその後 Vanden-Broeck<sup>4)</sup> と Schultz 等<sup>5)</sup> によってさらに解析的かつ数値的に発展させられた。これらの研究はすべて  $A = -1$  という一相流を取り扱っており、速度ポテンシャルのうち1つ (上側  $i = 2$ ) はゼロとおかれている。以下で Concus の摂動法を2相流体の場合に拡張し、非線形領域における振動数のずれまで含めた有限振幅定在波解を計算する。ここでの摂動計算は、 $-1 \leq A \leq 1$  にわたるすべてのアトウッド数に対して適用できる。 $A > 0$  は上側の流体が下側の流体より重い (RTI) 場合であることを注意しておく。

もし物理量を無次元になるように規格化すると、RTI と RMI で異なった規格化が必要になる<sup>11)</sup>。従って、ここではそれを行わない。変位  $\eta$ 、速度ポテンシャル  $\phi_i$  ( $i = 1, 2$ )、振動数  $\omega$  を微小パラメーター  $\epsilon$  ( $|\epsilon| \ll 1$ ) で

$$\begin{aligned} \eta &= \epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \dots, \\ \phi_i &= \epsilon \phi_i^{(1)} + \epsilon^2 \phi_i^{(2)} + \dots, \\ \omega &= \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \frac{\epsilon^2}{2} \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

と展開し、これらを方程式 (1) と (2) に代入すると、 $\epsilon$  の一次で

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \text{Re}\{A_1 e^{i\omega_0 t}\} \cos kx, \quad \omega_0^2 = -Agk + \frac{k^3\sigma}{2}, \\ \phi_1^{(1)} &= \frac{\omega_0}{k} \text{Re}\{iA_1 e^{i\omega_0 t}\} e^{ky} \cos kx \quad (y < 0), \\ \phi_2^{(1)} &= -\frac{\omega_0}{k} \text{Re}\{iA_1 e^{i\omega_0 t}\} e^{-ky} \cos kx \quad (y > 0) \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる。

$\epsilon$  の二次は

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \left[ \text{Re}\{A_{22}^{(2)} e^{2i\omega_0 t}\} + \text{Re}\{A_{20}^{(2)}\} \right] \cos 2kx, \\ \phi_1^{(2)} &= \text{Re}\{B_{21}^{(2)} e^{2i\omega_0 t}\} e^{2ky} \cos 2kx + \text{Re}\{B_{01}^{(2)} e^{2i\omega_0 t}\} \quad (y < 0) \\ \phi_2^{(2)} &= \text{Re}\{B_{22}^{(2)} e^{2i\omega_0 t}\} e^{-2ky} \cos 2kx + \text{Re}\{B_{02}^{(2)} e^{2i\omega_0 t}\} \quad (y > 0) \end{aligned}$$

で与えられ、ここで

$$\begin{aligned}
 A_{22}^{(2)} &= -\frac{Ak(A_1)^2}{4\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)}, \quad A_{20}^{(2)} = -\frac{k|A_1|^2}{4\left(1 + \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)}, \\
 B_{21}^{(2)} &= -\frac{i\omega_0\left[\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right) + A\right](A_1)^2}{4\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)}, \\
 B_{22}^{(2)} &= -\frac{i\omega_0\left[\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right) - A\right](A_1)^2}{4\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)}, \\
 \omega_1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

であり、 $B_{01}^{(2)}$  と  $B_{02}^{(2)}$  は次の関係式を満たす複素係数である。

$$(1 - A)B_{01}^{(2)} - (1 + A)B_{02}^{(2)} = \frac{iA\omega_0(A_1)^2}{2}$$

三次の解  $\eta^{(3)}$  と  $\phi_i^{(3)}$  ( $i = 1, 2$ ) は

$$\begin{aligned}
 \eta^{(3)} &= \left[\operatorname{Re}\{A_{13}^{(3)}e^{3i\omega_0 t}\} + \operatorname{Re}\{A_{11}^{(3)}e^{i\omega_0 t}\}\right]\cos kx \\
 &+ \left[\operatorname{Re}\{A_{33}^{(3)}e^{3i\omega_0 t}\} + \operatorname{Re}\{A_{31}^{(3)}e^{i\omega_0 t}\}\right]\cos 3kx, \\
 \phi_1^{(3)} &= \operatorname{Re}\{B_{13,1}^{(3)}e^{3i\omega_0 t}\}e^{ky}\cos kx \\
 &+ \left[\operatorname{Re}\{B_{33,1}^{(3)}e^{3i\omega_0 t}\} + \operatorname{Re}\{B_{31,1}^{(3)}e^{i\omega_0 t}\}\right]e^{3ky}\cos 3kx \quad (y < 0), \\
 \phi_2^{(3)} &= \operatorname{Re}\{B_{13,2}^{(3)}e^{3i\omega_0 t}\}e^{-ky}\cos kx \\
 &+ \left[\operatorname{Re}\{B_{33,2}^{(3)}e^{3i\omega_0 t}\} + \operatorname{Re}\{B_{31,2}^{(3)}e^{i\omega_0 t}\}\right]e^{-3ky}\cos 3kx \quad (y > 0),
 \end{aligned}$$

なる形をもち、ここで

$$\begin{aligned}
 A_{13}^{(3)} &= -\frac{k^2}{384}\left[2(7 - 2A) + \frac{3A(2 - A)}{\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} - \frac{3k^3\sigma}{4\omega_0^2}\right](A_1)^3, \\
 B_{13,1}^{(3)} &= -\frac{ik\omega_0}{128}\left[-2(15 + 2A) + \frac{3A(2 - A)}{\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} - \frac{3k^3\sigma}{4\omega_0^2}\right](A_1)^3, \\
 B_{13,2}^{(3)} &= \frac{ik\omega_0}{128}\left[-2(7 + 2A) + \frac{3A(2 - A)}{\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} - \frac{3k^3\sigma}{4\omega_0^2}\right](A_1)^3, \\
 A_{11}^{(3)} &= \frac{k^2}{16}\left[7 + 3A - \frac{A(2 + A)}{\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} + \frac{2A}{\left(1 + \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} + \frac{9k^3\sigma}{4\omega_0^2}\right]|A_1|^2A_1, \\
 A_{33}^{(3)} &= k^2\left\{-\frac{11}{96} + \frac{9A}{96\left(1 - \frac{2k^3\sigma}{\omega_0^2}\right)}\left(\frac{1}{3} - \frac{3A}{\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)}\right)\right. \\
 &\quad \left.- \frac{1}{12\left(1 - \frac{2k^3\sigma}{\omega_0^2}\right)}\left[\frac{11}{16\left(1 + \frac{4k^3\sigma}{\omega_0^2}\right)} - \frac{3A\left(3 + \frac{A}{2}\right)}{4\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} + \frac{63}{16} - \frac{3k^3\sigma}{32\omega_0^2}\right]\right\}(A_1)^3, \\
 B_{33,1}^{(3)} &= \frac{i\omega_0}{2}\left(\frac{2}{k}A_{33}^{(3)} + \frac{13k}{48}(A_1)^3 + \frac{3}{2}A_1A_{22}^{(2)}\right), \\
 B_{33,2}^{(3)} &= -\frac{i\omega_0}{2}\left(\frac{2}{k}A_{33}^{(3)} + \frac{9k}{48}(A_1)^3 - \frac{3}{2}A_1A_{22}^{(2)}\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{31}^{(3)} &= \frac{k^2}{4} \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{3}{\left(1 + \frac{6k^3\sigma}{\omega_0^2}\right)} \left[ -\frac{A(1-A)}{4\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} + \frac{8A+15}{48} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{55k^3\sigma}{32\omega_0^2} \right] \right\} |A_1|^2 A_1, \\
B_{31,1}^{(3)} &= \frac{i\omega_0}{2} \left( \frac{2}{3k} A_{31}^{(3)} - \frac{1}{2} A_1^* A_{22}^{(2)} + A_1 A_{20}^{(2)} + \frac{k}{8} |A_1|^2 A_1 \right), \\
B_{32,1}^{(3)} &= -\frac{i\omega_0}{2} \left( \frac{2}{3k} A_{31}^{(3)} + \frac{1}{2} A_1^* A_{22}^{(2)} - A_1 A_{20}^{(2)} + \frac{5k}{24} |A_1|^2 A_1 \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

である。 $A_1^*$  は  $A_1$  の複素共役を表す。さらに、永年項がゼロとなる条件から

$$\omega_2 = -\frac{k^2\omega_0}{8} \left[ \frac{7+6A}{2} - \frac{A(2+A)}{\left(1 - \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} + \frac{9k^3\sigma}{4\omega_0^2} + \frac{2A}{\left(1 + \frac{3k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} \right] |A_1|^2 \tag{7}$$

が成り立つ。方程式 (7) は重力波におけるストークスの非線形分散関係<sup>16)</sup> の、表面張力を伴った系への拡張となっている。

解 (5) における  $A_{22}^{(2)}$  と解 (6) における  $A_{33}^{(3)}$  からわかるように、これらの係数はそれぞれ、 $\omega_0^2 = 3/2k^3\sigma$  および  $\omega_0^2 = 2k^3\sigma$  で発散する。従って、上記の摂動解析はこれらの値で破綻することになる。 $n$  次の運動学的境界条件 (1) は

$$\frac{\partial \eta^{(n)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2^{(n)}}{\partial y} \right) = R_1, \quad -\frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2^{(n)}}{\partial y} = R_2,$$

で与えられ、これから  $\eta^{(n)}$  の中の係数  $A_{nn}^{(n)}$  と  $\phi_i^{(n)}$  ( $i=1,2$ ) の中の係数  $B_{nn,i}^{(n)}$  に関して

$$A_{nn}^{(n)} = -\frac{ik}{2\omega_0} (B_{nn,1}^{(n)} - B_{nn,2}^{(n)}) + R_3 \tag{8}$$

なる関係が得られる。ここで  $R_i$  ( $i=1,2,3$ ) は (1) の中の残りの項から生成される非線形項を表す。一方、ラプラス-ヤング条件 (2) は  $n$  次で

$$\begin{aligned}
&-n^2(1-A)\omega_0^2 B_{nn,1}^{(n)} + n^2(1+A)\omega_0^2 B_{nn,2}^{(n)} \\
&+ nk \left( \frac{\omega_0^2}{k} + \frac{(n^2-1)k^3\sigma}{2} \right) (B_{nn,1}^{(n)} - B_{nn,2}^{(n)}) = R_4
\end{aligned} \tag{9}$$

なる関係式を与える。ここで  $R_4$  は (2) の中の残りの項を表す。方程式 (8) と (9) から

$$A_{nn}^{(n)} = \frac{R}{\left(1 - \frac{(n+1)k^3\sigma}{2\omega_0^2}\right)} \tag{10}$$

が得られる。ここで  $R$  は  $O(\epsilon)$ ,  $O(\epsilon^2)$ ,  $\dots$ ,  $O(\epsilon^{n-1})$  から決定される非線形項である。

振動数  $\omega_0^2$  が

$$\omega_0^2 = \frac{(n+1)k^3\sigma}{2}, \tag{11}$$

を満たすときには、係数  $A_{nn}^{(n)}$  と  $B_{nn,i}^{(n)}$  ( $i=1,2$ ) は発散し、摂動計算は  $n$  次で破綻する。この発散は  $Ag < 0$  すなわち、上側の流体が下側の流体より軽いときにのみ生じる。条件 (11) は、Christodoulides と Dias<sup>17)</sup> によって調べられた表面張力波の定在波解における二次 ( $n=2$ ) の共鳴の一般化である。ここで波数  $nk$  と振動数  $n\omega_0$  は、式 (4) で与えられる  $k$  と  $\omega_0$  の分散関係と同じ分散関係を満たすことに注意されたい。パラメーターが  $n$  次共鳴を満たす場合の  $n=3$  を例にした数値計算結果が 3 節で示される。

### 3 解析的結果と数値計算との比較

この節では、前節で行った解析的計算と数値計算との比較を行い、合わせて臨界運動と共鳴運動の数値計算結果も示す。数値計算にあたっては、スペクトル精度 (指数関数的精度) をもった境界積分法<sup>10, 11)</sup> を用いる。この方法は

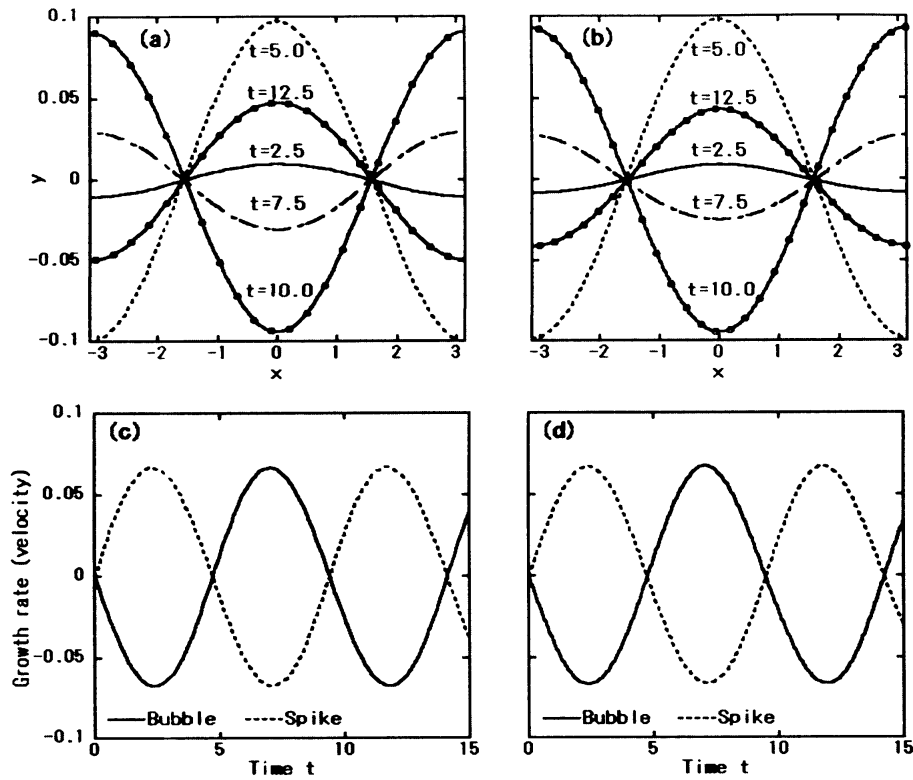


Fig. 1: 有限振幅定在波解に関する解析的結果と数値計算との比較。パラメーターは  $A = -0.2$ ,  $g = 1.0$ ,  $\sigma = 0.5$  で与えられている。(a) 解析的結果による界面の形状 (b) 数値計算によるな界面の形状 (c) 解析的計算によるバブルとスパイクの成長率（速度） (d) 数値計算によるバブルとスパイクの成長率（速度）。

Hou 等<sup>13, 14, 15)</sup>によって開発され、その後、表面張力を伴った RTI における渦層の運動の解析に適用された<sup>11, 18)</sup>。この数値計算法に関する詳細は文献<sup>11)</sup>を参照されたい。

この節全体を通して、RMI( $g = 0$ )における数値計算の初期条件は

$$x(\beta, 0) = \beta, \quad y(\beta, 0) = 0; \quad \gamma(\beta, 0) = 2\sin\beta, \quad (12)$$

で与えられ、RTI に関しては

$$x(\beta, 0) = \beta, \quad y(\beta, 0) = -0.1\cos\beta; \quad \gamma(\beta, 0) = 0, \quad (13)$$

で与えられるものとする。ここで、 $\beta$  は界面をパラメトライズするラグランジュパラメーターで、 $\gamma = \partial\Gamma/\partial\beta$ , ( $\Gamma = \phi_1 - \phi_2$ , 系の循環) は渦層の強さを表す<sup>11)</sup>。初期条件 (12) における係数 2 は圧縮性の効果が含まれる RMI の線形成長率<sup>19, 20)</sup>を用いて規格化を行っているために現れるものである。数値計算と比較するための RMI と RTI における解析的計算における初期条件は、式 (4) 中の振幅  $A_1$  のみで決定され、下記のように与えられる：

$$A_1 = i \quad (\text{RMI}), \quad A_1 = -1 \quad (\text{RTI}). \quad (14)$$

ここで、系の初期波数は解析的計算についても数値計算についても  $k = 1$  とおく。線形分散関係式の振動数  $\omega_0$  は RMI について  $\omega_0^2 = \sigma/2$  であり、RTI については  $\omega_0^2 = -Ag + \sigma/2$  を満たすことに注意していただきたい。

Fig. 1 に  $A = -0.2$ ,  $g = 1.0$ ,  $\sigma = 0.5$  における有限振幅定在波解に関する解析的計算と数値計算との比較を示す。ここで、弱非線形解析における  $\epsilon$  は  $\epsilon = 0.1$  とおかれている。また、 $A < 0$  というのは上側の流体が下側の流体より軽いことを意味している。数値積分の時間ステップ  $\Delta t$  とグリッド数 (点渦の数)  $N$  は、 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$  および  $N = 512$  ととられている。これは RTI というよりむしろ表面張力定在波解 (capillary-gravity standing wave solutions) の一例である。初期条件 (13) で与えられる界面は、次第に上昇し、 $t = 5.0$  のあたりで下降に転じ、再び  $t = 10.0$  で上昇

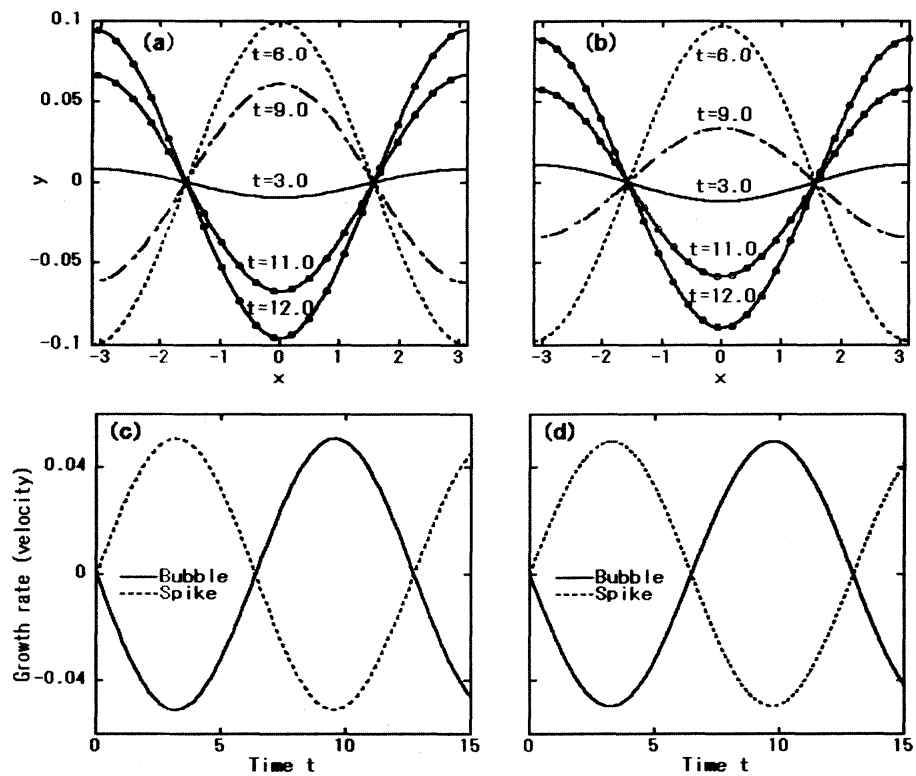


Fig. 2: 有限振幅定在波解に関する解析的結果と数値計算との比較。パラメーターは  $A = 0.5$ ,  $g = 1.0$ ,  $\sigma = 1.5$  で与えられている。(a) 解析的結果による界面の形状 (b) 数値計算による界面の形状 (c) 解析的計算によるバブルとスパイクの成長率 (速度) (d) 数値計算によるバブルとスパイクの成長率 (速度)。

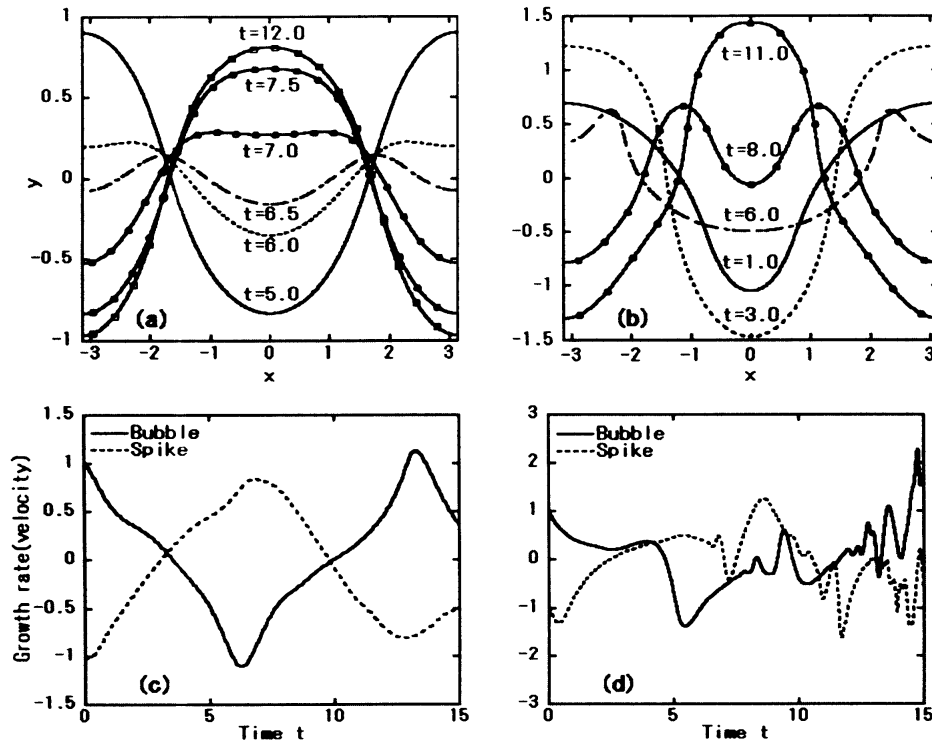


Fig. 3: RMI における安定・不安定有限振幅定在波解の数値計算例。(a)  $A = 0.2$ ,  $\sigma = 1.0$  における界面の形状、(c) (a) のバブルとスパイクの成長率、(b)  $A = 1.0$ ,  $\sigma = 1.0$  における界面の形状、(d) (b) のバブルとスパイクの成長率。

する。この運動が幾度も繰り返される。解析計算による界面の形状 (a) は、 $t = 7.5$  と  $12.5$  ラインのわずかなずれを除くと、数値計算結果 (b) とかなりよく合う。バブル ( $\beta = \pm\pi$  の点における界面) とスパイク ( $\beta = 0$  における界面) の解析的に計算された速度 (成長率) (c) は数値計算によるもの (d) とほとんど区別がつかない。摂動計算 (3) から得られる振動の周期  $T = 2\pi/\omega$  は  $T = 9.394$  で、数値計算から見積もられる周期は  $T = 9.358$  であり、その差は  $O(\epsilon^2)$  程度である。

Fig. 2 は RTI における有限振幅定在波解の一例である。ここで、パラメーターは  $A = 0.5$ ,  $g = 1.0$ ,  $\sigma = 1.5$ ,  $\epsilon = 0.1$  ととられている。数値計算における時間ステップとグリッド数はそれぞれ  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$  と  $N = 512$  とおかれている。この例では、上側の流体は下側の流体より重い ( $A > 0$ ) が、 $\omega_0^2 > 0$  かつ  $\omega_0$  がゼロに近くないときには安定な振動が可能である。解析的な界面の形状 (a) と数値計算結果 (b) は Fig. 1 の定在波解の場合ほど一致しないが、バブルとスパイクの解析的な成長率 (c) は数値結果 (d) とかなりよく合っている。解析的な計算から得られるこの振動運動の周期は  $T = 12.715$  で、数値計算から得られる周期は  $T = 12.935$  であり、その差は  $O(\epsilon)$  で、Fig. 1 の場合より大きい。これは表面張力効果が重力不安定性、すなわちレーリー・テラー不安定性を安定化する一つの例である。

RMI における安定・不安定有限振幅定在波解の例が Fig. 3 に示されている。ここで、アトウッド数  $A$  は (a) [(c)] では  $A = 0.2$ 、(b) [(d)] では  $A = 1.0$  と与えられている。表面張力係数  $\sigma = 1.0$  はすべての図に共通である。数値計算における時間ステップとグリッド数はそれぞれ、 $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$  と  $N = 512$  ととられ、初期条件は (12) で与えられている。RMI の場合には、式 (12) の  $\gamma(\beta, 0)$  のもつ係数 2 のために、解析的結果と数値結果の差はかなり大きい。この初期条件に関しては、解析的計算における  $\epsilon$  を  $\epsilon = O(1)$  とおかねばならず、摂動計算の近似が悪くなるのである。図の (a) と (c) からわかるように、界面の形状は線形運動から程遠く、バブルとスパイクの成長率 (速度) (c) と (d) も強い非線形性を示している。図 (a) [(c)] に示された定在波解は  $t \geq 50$  でも安定であるが、(b) [(d)] の解は不安定で、計算は  $t = 26$  のあたりで破綻する。

線形安定性解析からわかるように、 $\omega_0^2 > 0$  のとき系は (中立) 安定で、定在波解が存在し、 $\omega_0^2 < 0$  のときは系は不安定で定在波解は存在しない。また、 $\omega_0 = 0$  のときは線形安定性解析は界面の運動について何の情報も与えない。線形分散関係  $\omega_0^2 = \sigma/2$  が  $\sigma \neq 0$  に対し常に正であることから容易にわかるように、この臨界状況は RMI では生じ



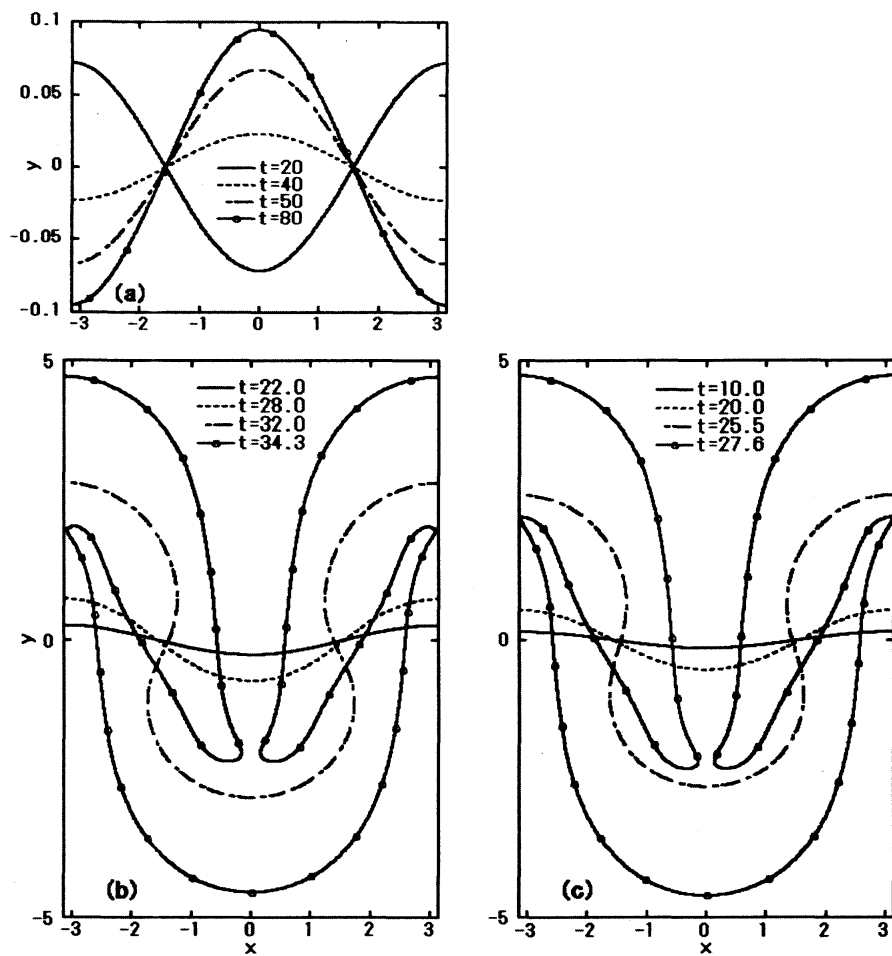


Fig. 4: 臨界、臨界近傍における界面の形状。パラメーターは  $A = 0.2$ ,  $g = 5.0$ ,  $\sigma =$ (a) 2.01、(b) 2.0 (臨界)、(c) 1.99。

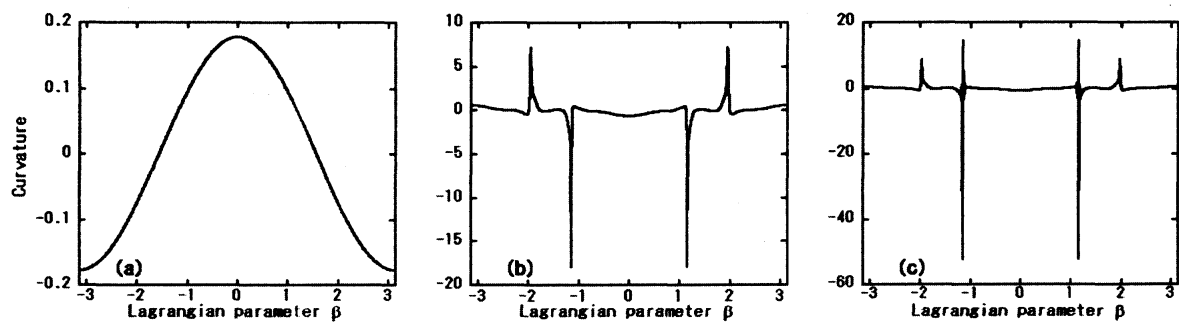


Fig. 5: 臨界、臨界近傍における界面の曲率。パラメーターは  $A = 0.2$ ,  $g = 5.0$  で、時間  $t =$  (a) 84.0, (b) 34.3, (c) 28.0 である。曲率 (a)–(c) は Fig. 4 における界面 (a)–(c) に相当する。

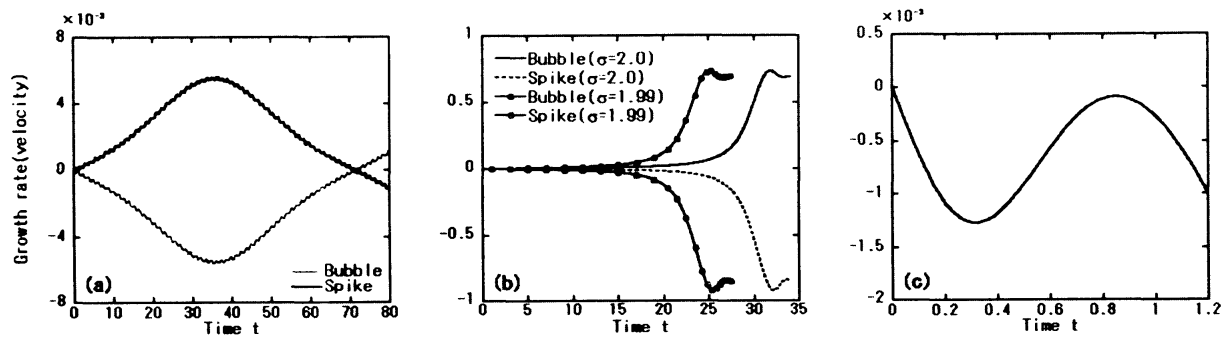


Fig. 6: 臨界および臨界近傍運動におけるバブルとスパイクの成長率（速度）。ここでパラメーターは  $A = 0.2$ ,  $g = 5.0$  で、 $\sigma =$  (a) 2.01, (b) 2.0 & 1.99 である。(c) は (a) の初期時刻を拡大したもの。

ない。また、これは  $A > 0$ 、すなわち、上側の流体が下側の流体より重い状況でのみ生じる。臨界点  $\omega_0 = 0$  は解の分岐点であり、 $\omega_0$  がわずかにゼロからずれると運動は劇的に変化する。ここではこの状況を数値的に示す。

Fig. 4 に臨界点および臨界点近傍の界面の形状の数値計算結果を示す。ここでパラメーターは  $A = 0.2$ ,  $g = 5.0$  で、 $\omega_0$  は  $\sigma = 2.0$  でゼロ（臨界点）になる。計算のグリッド数  $N$  は、 $N = 512$  [(b) の  $0 \leq t \leq 28.0$  と (c) の  $0 \leq t \leq 20.0$ ] から  $N = 1024$  [(b) の  $28.0 \leq t \leq 32.0$  と (c) の  $20.0 \leq t \leq 25.5$ ] へ、さらに  $N = 2048$  [(b) の  $32.0 \leq t \leq 34.3$  と (c) の  $25.5 \leq t \leq 27.6$ ] へと精密化され、それに伴って時間ステップ  $\Delta t$  も  $N = 512$  と  $1024$  に対しては  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ 、 $N = 2048$  に対しては  $\Delta t = 6.25 \times 10^{-5}$  と細くなる。図 (a) のグリッド数  $N$  は  $N = 512$  で、精密化はなされない。計算は、(b) では  $t = 34.3$ 、(c) では  $t = 27.6$  の数ステップ後に破綻する。界面 (a) は定在波解を表しているが、(b) と (c) は渦層であり、運動は不安定である。臨界点 (b) ( $\omega_0 = 0$ ) での界面の時間発展は、(c) の  $\omega_0^2 < 0$  の場合とほとんど同じであるが、(c) の方がより短い時間で非線形段階に到達する。

Fig. 5 (b) と (c) からわかるように、Fig. 4 の (b) と (c) の最終形状における曲率は非常に大きくなっている。一方、 $\omega_0^2 > 0$  に対する曲率 (a) は界面が破綻時刻（ここでは  $t = 84.0$ ）に近づいたときですらかなり小さい。この場合、界面や曲率の形状には何の破綻の兆候も見られないが、渦層の強さ  $\gamma$  には  $t = 83.0$  から激しい振動が現れ始め、この振動がやがて計算の破綻へと導く。 $\omega_0^2$  が正でかつその値がゼロにそれほど近くないときには、 $A > 0$  の運動は Fig. 2 に見られるようにより安定になり、計算は  $t \geq 100$  でも破綻しない。一方、 $\omega_0^2 < 0$  でかつその値がゼロから離れているときには、界面は渦層と見なされる。この場合には振動運動は現れず、Fig. 4 の (b), (c) に見られるように、界面は最終的に巻き上がる。 $\omega_0^2 < 0$  に関する様々な界面の運動が文献<sup>10, 11)</sup>に示されている。

Fig. 6 に Fig. 4 と Fig. 5 に相当する、臨界点および臨界点近傍のバブルとスパイクの成長率（速度）が示されている。 $\omega_0$  がゼロに近いと、臨界点 ( $\sigma = 2.0$ ) を含む臨界点近傍の  $\sigma = 2.01$  や  $\sigma = 1.99$  に、ある種の時間的変調が現れる。この時間的変調は、 $\omega_0$  の値がゼロから遠ざかるにつれて姿を消す。図 (c) に (a) の初期時刻の変調の様子が拡大されている。同様の変調は不安定運動  $\sigma = 2.0$  と  $1.99$  の図にも見られるが、それらは界面の非線形成長の開始とともに消失する。この非線形成長は  $\sigma = 2.0$  の場合には  $t = 25$  のあたりから、 $\sigma = 1.99$  の場合には  $t = 20$  のあたりから現れ始め（図 (b) 参照）、界面は Fig. 4 (b) と (c) に見られるように急速に巻き上がる。変調の周期は  $O(1)$  であるが、定在波解 (a) の周期は  $O[(\omega_0)^{-1}]$  である。ここで  $\omega_0 = O(10^{-1})$  であるので、これらの振動は異なった時間スケールをもっていることがわかる。図 (c) からわかるように、この変調は sinusoidal で、周期は表面張力係数  $\sigma$  のみに依存する。すなわち、パラメーター  $A$  と  $g$  を変えても  $\omega_0 \approx 0$  である限り、この変調の周期は変化しない。

Fig. 7 は共鳴条件 (11) を満たすときの界面の形状と循環  $\Gamma$  および（真の）渦層強さ  $\tilde{\gamma} = \gamma/s_\beta$  を示している。ここで、 $s_\beta$  は長さ  $s$  の  $\beta$  微分である。これらはすべて数値計算結果で、条件 (11) 中の  $n$  は  $n = 3$  ととられている。他の  $n$  の値でも同様の結果が得られる。共鳴する場合は、時間積分についてより高精度の計算が必要で、従って図 1–6 の計算で用いられた<sup>11)</sup>のとは異なったスキームを用いる。ここでは時間積分を、Ascher, Ruuth, Wetton によって開発された ARW 法<sup>21)</sup>と呼ばれる 4 次のスキームで計算する。これは陰的・陽的多段法の一種で、表面張力を伴った方程式のような“スティフネス”をもった系に適用して安定に計算できるように作られている。空間積分のスキームは不変である。時間ステップ  $\Delta t$  は  $0 \leq t \leq 1.25$  について  $\Delta t = 6.25 \times 10^{-5}$ 、 $1.25 \leq t \leq 1.36$  について  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-5}$  ととられ、グリッド数  $N$  は  $0 \leq t \leq 1.25$  に対して  $N = 1024$ 、 $1.25 \leq t \leq 1.36$  に対して  $N = 2048$  である。初期条件

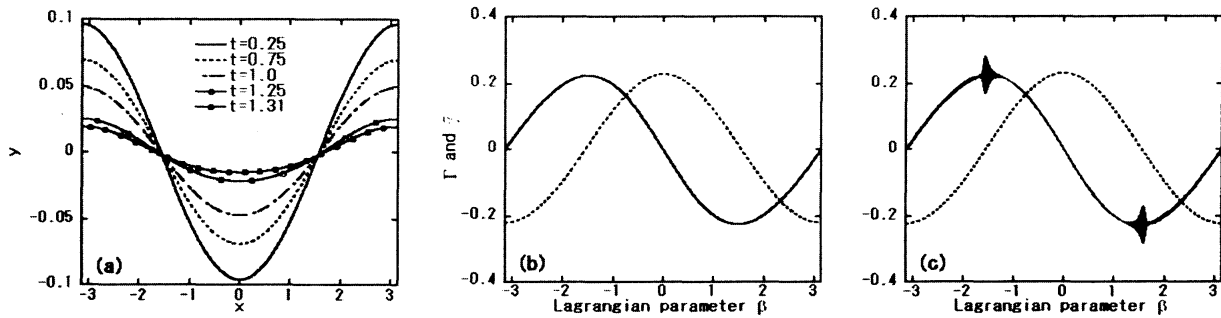


Fig. 7: 共鳴定在波解。(a) 界面の形状、 $t =$  (b) 1.25 と (c) 1.31 における循環  $\Gamma$  と (真の) 渦層強さ  $\tilde{\gamma}$ 。パラメーターは  $A = -1.0$ ,  $g = 1.0$ ,  $\sigma = 2/3$  で与えられ、(b) と (c) の中の実線と点線はそれぞれ渦層強さ  $\tilde{\gamma}$  と循環  $\Gamma$  を表している。

(13) から出発した界面は  $t = 1.36$  まで一度も下降することなく上昇を続ける。時刻  $t = 1.36$  における界面の形状はほぼ平らだが、下に凸の形を維持しており、このとき渦層強さ  $\tilde{\gamma}$  に激しい振動（変調）が現れる。この激しい振動が現れる少し前の渦層強さを Fig. 7 (c) に示した。図中の強い変調を伴った2つの黒い波束（wave packet）は次第に曲線上に拡がり、最終的（ $t = 1.36$ ）には渦層強さのラインは幅広い帯のようになる。この共鳴運動は  $A < 0$ 、すなわち、上側の流体が下側の流体より軽い場合にしか起きないことを付け加えておく。

## 4 結論

密度成層と表面張力を伴った界面の定在波運動が調べられた。弱非線形解析がなされ、定在波振動の周期を含めて、解析的結果は数値計算とよく合うことが示された。また、線形分散関係式  $\omega_0^2 > 0$  が満たされるときには、例えば上側の流体が下側の流体より重くても、界面は安定に振動し得ることが示された。このことは、表面張力が重力不安定、すなわち、レーリー・テラー不安定性を安定化することを示唆している。 $\omega_0 = 0$  のときには、ほとんど静止した長い線形運動のあとで、界面が急激に非線形成長を始める臨界運動が得られた。共鳴条件 (11) は、 $e^{i(kx - \omega_0 t)} + c.c.$  の形の進行波に関しても成り立ち、このとき共鳴が起こるすべての  $n$  について、位相速度  $\omega/k$  が等しくなる。共鳴条件が満たされるとき、進行波に何が生じるかについては何もわかっていないが、3節で得られた定在波に関する結果がこの問題に対する何らかのヒントを与えてくれるかもしれない。時間と空間に関して多重スケール（multiple scale）を導入すると、臨界および共鳴点近傍において振幅方程式を求めることができる。この振幅方程式を含む臨界点近傍の変調運動と共鳴定在波解の詳細については別のところで報告する。

## 謝辞

この研究は科学研究費補助金基盤研究 (C) の支援を受けてなされている。

## REFERENCES

- 1) Whitham G B in *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley & Sons, 1999)
- 2) Okamoto H and Shoji M in *The mathematical theory of permanent progressive water-waves*, (World Scientific, 2001)
- 3) Concus P 1962 *J. Fluid Mech.* **14** 568
- 4) Vanden-Broeck J-M 1984 *J. Fluid Mech.* **139** 97
- 5) Schultz W W, Vanden-Broeck J-M, Jiang L and Perlin M 1998 *J. Fluid Mech.* **369** 253 [references therein]

- 6) Richtmyer R D 1960 *Comm. Pure. Appl. Math.* **13** 297, Meshkov E E 1969 *Fluid Dyn.* **4** 101
- 7) Matsuoka C, Nishihara K and Fukuda Y 2003 *Phys. Rev. E* **67** 036301, 2003 **68** 029902(E)
- 8) Matsuoka C and Nishihara K 2006 *Phys. Rev. E* **73** 026304 (references therein), 2006 **74** 049902(E)
- 9) Matsuoka C and Nishihara K 2006 *Phys. Rev. E* **73** 055304(R), 2006 **74** 066303
- 10) Matsuoka C 2008 *Phys. Scr. E* **T132** 014042
- 11) Matsuoka C 2009 *Phys. Fluids* **21** 092107
- 12) Leppinen D and Lister J R 2003 *Phys. Fluids* **15** 568
- 13) Hou T Y, Lowengrub J S and Shelley M J 1993 *J. Comput. Phys.* **114** 312
- 14) Hou T Y, Lowengrub J S and Shelley M J 1997 *Phys. Fluids* **9** 1933
- 15) Hou T Y, Lowengrub j S and Shelley M J 2001 *J. Comput. Phys.* **169** 302
- 16) Hakim V 1998 in *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, ed. by Godréche and Manneville (Cambridge) 295
- 17) Christodoulides P and Dias F 1994 *J. Fluid Mech.* **265** 303
- 18) Cenicerros H D and Hou T Y 1998 *Math. Comput.* **67** 137
- 19) Wouchuk J G and Nishihara K J 1996 *Phys. Plasmas* **3** 3761, 1997 **4** 1028
- 20) Nishihara K, Wouchuk J G, Matsuoka C, Ishizaki R and Zhakhovsky V V to be published in *Philos. Trans.* 2010.
- 21) Ascher U M, Ruuth S J and Wetton B 1995 *SIAM J. Num. Anal.* **32** 797